

Suite de polygones

Lemme: Soit $L = \sum_{k=0}^n a_k X^{k-1} \in \mathbb{C}[X]$, $w := e^{\frac{2i\pi}{n}} \in \mathbb{T} \setminus 1$ et $A = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & \dots & a_n \\ & a_1 & \dots & a_n \\ & & \ddots & \\ a_n & \dots & a_1 & a_0 \end{pmatrix}$. Alors $\chi_A = \prod_{k=0}^{n-1} (X - L(w^k))$

On pose $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{T}_n(\mathbb{C})$ et on remarque que $\forall k \in \{0, n\}$, $J^k = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 1 \\ & \ddots & \\ 1 & & 0 \end{pmatrix}$

Donc A s'écrit $A = a_0 I_n + a_1 J + \dots + a_n J^{n-1} = L(J)$. De plus, $X^n - 1$ annule J et la famille $(J^k)_{k=0}^{n-1}$ est libre. Donc $\mu_J = X^n - 1$, scinde à n racines simples sur $\mathbb{C}$: $1, w, \dots, w^{n-1}$.

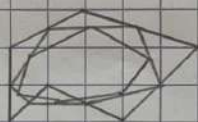
Alors J est diagonalisable et $\exists Q \in GL_n(\mathbb{C})$ telle que $Q^{-1} J Q = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & w^{n-1} \end{pmatrix} =: D$

D'où $Q^{-1} A Q = Q^{-1} L(J) Q = L(Q^{-1} J Q) = L(D) = \begin{pmatrix} L(1) & & \\ & \ddots & \\ & & L(w^{n-1}) \end{pmatrix}$ et $\chi_A = \chi_{L(D)} = \prod_{k=0}^{n-1} (X - L(w^k))$

Théorème: Soit $P_0 = (P_{0,i})_{i=1}^n \in \mathbb{C}^n$ un polygone à n sommets. On définit la suite de polygones $(P_k)_k$ par $\forall k \in \mathbb{N}, \forall i \in \{1, n-1\}$ $P_{k+1,i} = a P_{k,i} + b P_{k,i+1}$ et $P_{k+1,n} = a P_{k,n} + b P_{k,1}$, où $a+b=1$

Alors $(P_k)_k$ converge vers l'isobarycentre, ie $\forall i \in \{1, n\}$ $P_{k,i} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n P_{0,i}$.

Pour $a=b=\frac{1}{2}$,



on fait

On remarque que $\forall k \in \mathbb{N}$, $P_{k+1} = A P_k$ où $A = \begin{pmatrix} a & b & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & b & a \end{pmatrix}$ matrice circulaire. Donc par récurrence, $\forall k \in \mathbb{N}$ $P_k = A^k P_0$.

① Diagonaliser A ② $P_k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} P \in \mathbb{C}^n$ ③ Calcul de P ④ Conclusion

①

Par le lemme, avec $L = a + bX$ on a $\chi_A = \prod_{k=0}^{n-1} (X - (a + b w^k))$. Avec les mêmes notations, A est diagonalisable et $Q^{-1} A Q = L(D) = \begin{pmatrix} \lambda_0 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_{n-1} \end{pmatrix}$ où $\lambda_k = a + b w^k$, $\forall k \in \{0, n-1\}$

②

On a $\|A\| = a + b = 1$ et $\forall k \in \{1, n-1\}$ $\|\lambda_k\| \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$ car

$$\|\lambda_k\|^2 = |a + b e^{\frac{2i\pi k}{n}}|^2 = (a + b \cos(\frac{2k\pi}{n}))^2 + (b \sin(\frac{2k\pi}{n}))^2 = a^2 + 2ab \cos(\frac{2k\pi}{n}) + b^2 = \underbrace{(a+b)^2}_{=1} + 2ab \underbrace{(\cos(\frac{2k\pi}{n}) - 1)}_{\leq 0} < 1$$

Donc $(L(D)^k)_k$ converge, $(A^k)_k$ converge et $P_k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} P$

③

Par continuité du produit, $AP = P$ et $P \in E_1 = \text{Ker}(A - I_n)$. On a $Ae = A$ pour $e = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ et puisque A a n valeurs propres distinctes, on a $\dim E_1 = 1$. Alors $\exists g \in \mathbb{C}$ tel que $P = ge = \begin{pmatrix} g \\ \vdots \\ g \end{pmatrix}$.

④

On pose $\forall k \in \mathbb{N}$, $g_k = \text{Isobary}(P_k) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n P_{k,i}$. On a $\forall k \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} g_{k+1} &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n P_{k+1,i} \\ &= \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^{n-1} a P_{k,i} + b P_{k,i+1} + a P_{k,n} + b P_{k,1} \right) \\ &= \frac{1}{n} \left(a \sum_{i=1}^n P_{k,i} + b \sum_{i=1}^n P_{k,i+1} \right) \\ &= \frac{1}{n} (a+b) \sum_{i=1}^n P_{k,i} = g_k \end{aligned}$$

$$f: \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}$$

$$(a_k)_{k=1}^n \mapsto \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n a_k$$

$$P_k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} P \Rightarrow f(P_k) = g_k \rightarrow f(P) = g.$$

Donc $g_{k+1} = g_k = \dots = g_0$ et par continuité du passage à l'isobarycentre $g_k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n P_i = g = g_0$.

- * $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow L(J) = A \rightarrow X = X^{-1}, Q \pm Q^{-1} = D \rightarrow X_n = X_{2n} = \prod (X - L(w^k))$
- * ① $X_n = \prod (w^k w^{-k}) \text{ diag } Q A Q^{-1} = D$ ② $\lambda_0 = \alpha + \beta = 1, |\lambda_k| < 1 \text{ } k \geq 1 \rightarrow A^k w, P_k = A^k P_0 \rightarrow P$
- ③ $P = A P \rightarrow X_n \text{ scs } \rightarrow P \in K \cap (A - I)^{-1} = \text{Vect}(e_i, P = (g, g, \dots, g))$
- ④ $g_{k+2} = g_k = \dots = g_0 \rightarrow g_k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} g \rightarrow g = g_0$

Remarque: Détails sur la diagonalisation de J

- Soit $e = (e_i)_{i=1}^n$ la base canonique de $\mathbb{C}^n$, et $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 0 & 1 \\ 1 & & & 0 \end{pmatrix}$. On a $\forall i \in \{1, \dots, n\}, p \in \mathbb{N}$
 - * $J e_i = e_{i+1}$ si $i < n$; $J e_n = e_1$ $i = n$
 - * $J^p e_i = e_{i+p}$ si $i < p$; $J^p e_i = e_{i+p-n}$ si $i \geq p$
- Soit $\lambda \in \text{Sp}(J)$ de vecteur propre $x \in \mathbb{C}^n$ tel que $Jx = \lambda x$. On a

$$\begin{cases} x_2 = \lambda x_1 \\ x_3 = \lambda x_2 \\ \vdots \\ x_n = \lambda x_{n-1} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_k = \lambda^{k-1} x_1 & \text{et } \lambda \in \mathbb{C}_n \\ x_1 = \lambda^n x_1 & \text{et } x_1 = \lambda^{-1} x_2 \end{cases} \Rightarrow x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \lambda x_1 \\ \vdots \\ \lambda^{n-1} x_1 \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda \\ \vdots \\ \lambda^{n-1} \end{pmatrix} = x_1 \sum_{k=1}^n \lambda^{k-1} e_k$$

Réciproquement, si $w \in \mathbb{C}_n$ et $x := \sum_{k=1}^n w^{k-1} e_k$, on a bien $\text{Sp } J = \mathbb{C}_n$

$$Jx = \sum_{k=1}^n w^{k-1} J e_k = \sum_{k=2}^n (w^{k-2} e_{k-1}) + w^{n-1} e_n = w \left(\sum_{k=2}^n w^{k-2} e_{k-1} \right) + w^{n-1} e_n = wx$$

- On a bien $(J^k)_{k=0}^{n-1}$ libre car si $(\alpha_k)_{k=0}^{n-1} \in \mathbb{C}^n$ tel que $\sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k J^k = 0$, alors

$$0 = \left(\sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k J^k \right) e_1 = \alpha_0 e_1 + \alpha_1 J e_1 + \alpha_2 J^2 e_1 + \dots + \alpha_{n-1} J^{n-1} e_1 = \alpha_0 e_1 + \alpha_1 e_2 + \alpha_2 e_3 + \dots + \alpha_{n-1} e_n$$

Donc $\alpha_0 = \alpha_1 = \dots = \alpha_{n-1} = 0$ car $(e_i)_{i=1}^n$ base de $\mathbb{C}^n$.

- On pose $\Omega = \begin{pmatrix} 1 & w & \dots & w^{n-1} \\ 1 & w^2 & \dots & w^{2(n-1)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & w^{n-1} & \dots & w^{(n-1)^2} \end{pmatrix} = (w^{(i-1)(j-1)})_{i,j}$ matrice de Vandermonde

$$A\Omega = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & \dots & a_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & \dots & a_n^{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & w & \dots & w^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & w^{n-1} & \dots & w^{(n-1)^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L(1) & L(w) & \dots & L(w^{n-1}) \\ L(1)^2 & L(w)^2 & \dots & L(w^{n-1})^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ L(1)^{n-1} & L(w)^{n-1} & \dots & L(w^{n-1})^{n-1} \end{pmatrix}$$

Donc $\det(A\Omega) = L(1)L(w)\dots L(w^{n-1}) \det(\Omega)$ et $\det(A) = \prod_{k=0}^{n-1} L(w^k)$

Remarque: Réduction des matrices circulantes

On a montré que l'ensemble des matrices circulantes est $\mathbb{C}[J]$ (car $J^n = I_n$).

C'est donc une $\mathbb{C}$ -algèbre commutative. Si $A = L(J) \in \mathbb{C}[J]$, on a A diagonalisable

de spectre $\text{Sp}(A) = L(\mathbb{C}_n) = \{L(w^k) \mid k \in \{0, \dots, n-1\}\}$, de vecteur propre $\forall \lambda \in \text{Sp}(A)$

$x_\lambda = \sum_{k=1}^n \lambda^{k-1} e_k$, car on a bien $Ax_\lambda = L(J)x_\lambda = L(\lambda)x_\lambda$. On pose $\Omega = [x_1, x_w, \dots, x_{n-1}]$

et on a bien $A = \Omega \Lambda \Omega^{-1}$ où $\Lambda = \begin{pmatrix} L(1) & & \\ & L(w) & \\ & & \ddots \\ & & & L(w^{n-1}) \end{pmatrix} = L(D)$. Avec $U := \frac{1}{\sqrt{n}} \Omega$, on a

$U^* U = U U^* = I_n$ et $U \in U_n(\mathbb{C})$ unitaire. Donc l'ensemble des matrices circulantes

$$\mathbb{C}[J] = U \mathbb{C}[D] U^*$$